06/05/2019

Μάθημα 15ο

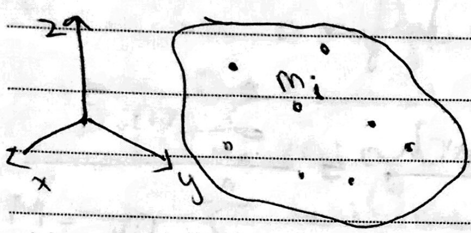
Δυναμική του Υ.Σ.

Ανάλυση και περιγραφή του Υ.Σ: $m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F}$

Δυναμική συστήματος Υ.Σ

περιγραφή - μοντελοποίηση

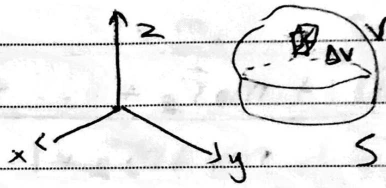
Διακριτό σύστημα Υ.Σ.



Μπορώ να το εκφράσω ως ένα ενιαίο σώμα-μάζα που αποτελείται από m_i, $i=1,2,\dots,n$ μάζες

Συνεχές σύστημα

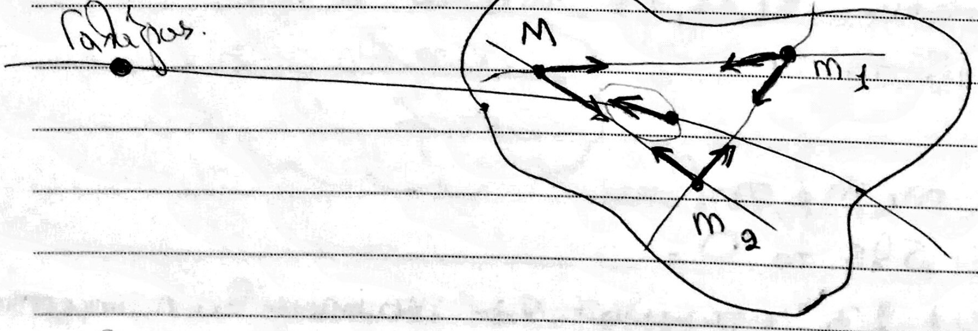
(Θεωρία συνεχούς μέσου)



Το περιγράφω ως ένα συνεχές μέσο.
Δε ξέρω πως κατανέμεται η μάζα ⇒ εισάγω την έννοια της πυκνότητας: $\Delta\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$

Τι δυνάμεις ασκούνται πάνω στο σύστημα;

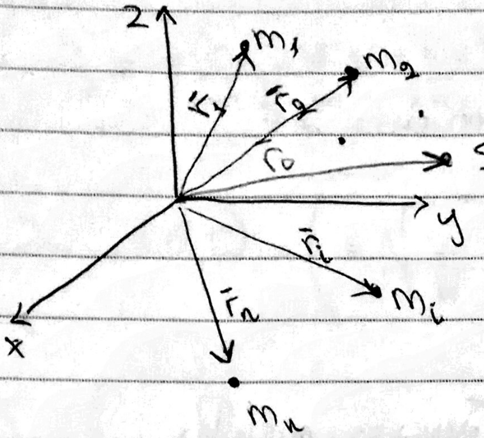
πχ. Έστω ότι έχω το σύστημα 3 μαζών. Τι δυνάμεις ασκούνται σε αυτό;



Παίρνω τις δυνάμεις που ασκούνται στις μάζες μεταξύ τους.

Ποιες είναι εσωτερικές δυνάμεις που ισορροπούν το σύστημα και ποιες οι εξωτερικές που ασκούν επιρροή σε αυτό;
(Είτε έχω συνεχές σύστημα είτε διακριτό θα τα εξετάζω αυτά)

Κέντρο μάζας διακριτού συστήματος.



$m_i, i=1,2,...,n$

Θα πρέπει να βρω το κέντρο μάζας και βάση αυτού να περιγράψω τις δυνάμεις (εσωτ + έξωτ)

Το αντιμετωπίζω ως μια οντότητα.

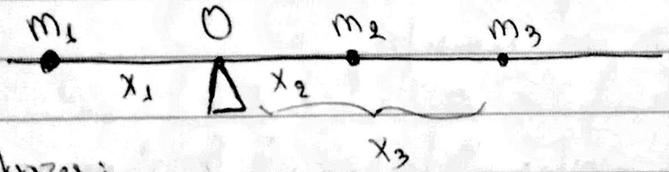
Θα βρω το διάνυσμα θέσης του κέντρου μαζών:

$$\bar r_S = \frac{m_1\bar r_1 + m_2\bar r_2 + ... + m_i r_i + ... + m_n r_n}{m_1+m_2+...+m_i+...+m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i = M}$$

εκφράζει μια ροπή

Θα το αναλύσω μονοδιάστατα και μετά θα το ερμηνεύσω - γενικεύσω στις 3 διαστάσεις

Κέντρο Μάζας



Ερωτήματα:

α) Γνωρίζω τις μάζες m_1, m_2, m_3
Γνωρίζω τις αποστάσεις x_1, x_2, x_3 από το O.
Ψάχνω το Σ.Ι., δλδ το O.

β) Γνωρίζω τις μάζες m_1, m_2, m_3
Γνωρίζω το Σ.Ι. δλδ το O.
Ψάχνω τα x_i, $i=1,2,3$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισορροπία.

Παρατήρηση: Το Σ.Ι. είναι το κέντρο μάζας του συστήματος

Άρα, αν βρω το Σ.Ι. θα βρω αυτόματα το κέντρο μάζας (και αντίστροφα).

Το βάρος των m_i είναι $B_i = m_i g$

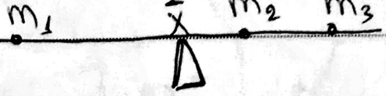
$M_i = m_i g x_i$, ροπή λόγω της δύναμης του βάρους.

<u>Συνολική Ροπή</u>: $M = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3$.

υπό την προϋπόθεση ότι το O είναι η αρχή των αξόνων

Γενικά αν έχω n μάζες τότε $M = \sum_{i=1}^{n} m_i g x_i$

Έστω ότι αλλάζω τη θέση ισορροπίας στο $\bar{x}$. Τότε για την ροπή θα έχω:



$M_i = m_i g (x_i - \bar{x})$

Άρα η συνολική ροπή θα είναι $M = \sum_{i=1}^{3} m_i g (x_i - \bar{x})$

Στο $\bar{x}$ το σύστημα θα ισορροπεί αφού είναι το ΣΙ,
δηλαδή θα ισχύει για την ροπή (συνολική):

$M = \sum_{i=1}^{3} m_i g (x_i - \bar{x}) = 0$ ή γενικά:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i g (x_i - \bar{x}) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_i m_i g x_i - \sum_i m_i g \bar{x} = 0 \iff$$

$$\iff \bar{x} \sum_i m_i g = \sum_i m_i g x_i \iff \bar{x} = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g} \iff$$

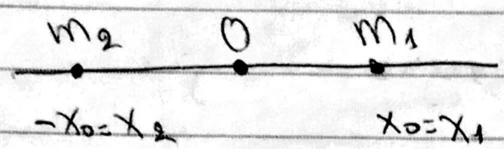
$$\iff \bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

συνολική μάζα

Άρα βρίσκω κάθε ροπή που ασκείται στο σύστημα
τις αθροίζω το βρίσκω το κέντρο μάζας
(με την προϋπόθεση ότι είναι ΣΙ)

Παράδειγμα: Να βρεθεί το Κ.Μ. του συστήματος με:

$m_1 = m_2 = m$, $x_1 = -x_0$, $x_2 = x_0$

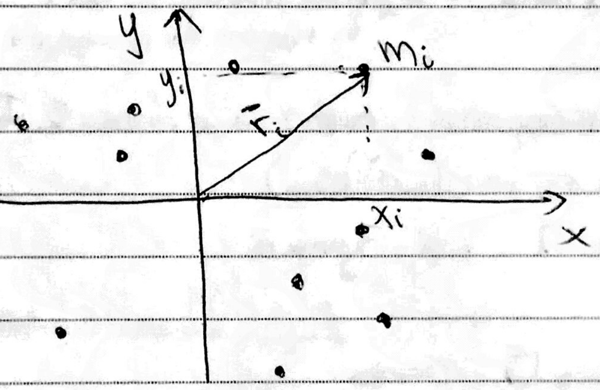


τραμπάλα.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m(-x_0 + x_0)}{2m} = 0$$

Άρα το O είναι το Σ.Ι. και το ΚΜ.

Μάζες τοποθετημένες σε επίπεδο χώρο



Τυχαία κατανεμημένες οι μάζες

ΔΘ. $\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j}$

συνολική μάζα: $m = \sum_i m_i$

Κάθε μία από τις μάζες θα έχει ροπή σε κάθε έναν από τους άξονες. Ανάλογα σε συνιστώσες και εργαζόμαστε στους x και y-άξονες.

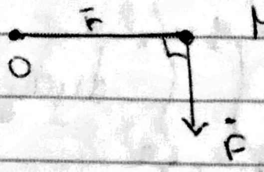
Άρα: κέντρο μάζας: $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

όπου $M_y = \sum_i m_i x_i$, $M_x = \sum_i m_i y_i$ (άθροισμα ροπών στους άξονες)

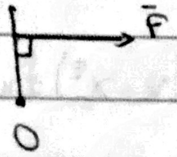
Παρατήρηση: η ροπή ως προς τον x-άξονα αντιστοιχεί σε συντεταγμένες y_i

η ροπή ως προς τον y-άξονα αντιστοιχεί σε συντεταγμένες x_i

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το Δ.Θ.
$\bar{r}_s = \bar{x}\,\hat{i} + \bar{y}\,\hat{j}$ του Κ.Μ. του συστήματος.



$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$ Στον x-άξονα



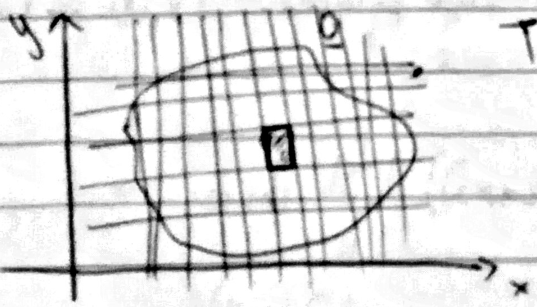
Στον y-άξονα

Άρα: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$, $\bar{y} = \dfrac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}$

Συνεχής περίπτωση:

Στερεό σώμα: Βασικό χαρακτηριστικό των στερεών σωμάτων είναι η ακαμψία, δηλ. δεν αλλάζουν το σχήμα τους κάτω από μεταβολές της ταχύτητας, πίεσης, θερμοκρασίας κλπ.

Εμβαδόν:



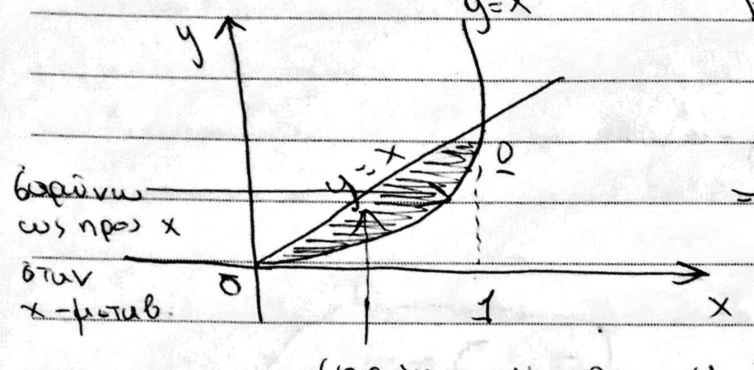
Το αντιμετωπίζουμε ως ένα συνεχές μέσο
→ ολοκληρώνουμε → διαμέρισμα

$E = \iint_{\Omega} dA = \iint_{\Omega} dx\,dy$ εμβαδόν

m διαμέρισμα στον x
n διαμερίσματα στον y
$m, n \to \infty$
$dA = dx\,dy$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλεται από τις καμπύλες: $y=x$, $y=x^2$, $x,y>0$

Λύση



$$E=\iint_{\Omega} dy\,dx = \int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dy =$$

$$= \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = 1/6.$$

σαρώνω ως προς y όταν το y μεταβάλλεται και διατηρώ το x σταθερό.

Αν αλλάξω τη σειρά ολοκλήρωσης θα πάρω το ίδιο αποτέλεσμα. (Θεώρημα Fubini)

$$E=\iint_{\Omega} dx\,dy = \int_0^1\int_{y}^{\sqrt{y}} dx\,dy = \int_0^1 [x]_y^{\sqrt{y}}\,dy = 1/6$$

Παρατήρηση: Αλλαγή μεταβλητής στα πολλαπλά ολοκληρώματα γίνεται με τη βοήθεια της Ιακωβιανής ορίζουσας

Έστω ότι: $x=g(u,v)$, $y=f(u,v)$ αλλαγή μεταβλ.: $(x,y)\to(u,v)$

Τότε: $$\iint_{\Omega} h(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{\Omega}} [h(g(u,v),f(u,v))]\cdot \underbrace{|J|}_{=|J(u,v)|}\cdot du\,dv =$$

$$= \iint_{\tilde{\Omega}} K(u,v)\cdot|J|\,du\,dv. \quad \text{όπου } J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα στις 3 διαστάσεις έχω:

$$\begin{cases} x = g(u,v,w) \\ y = f(u,v,w) \\ z = \ell(u,v,w) \end{cases}$$

$$J(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

① Πολικές $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $|J| = r$

② Κυλινδρικές $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$, $|J| = r$

③ Σφαιρικές $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$, $|J| = r^2\sin\varphi$, $\sin\varphi \geq 0$